

Partiamo da una domanda:

*Che cos'è così caratteristico dell'attività matematica,
in confronto alle altre attività cognitive,*

*da suscitare difficoltà di apprendimento più complesse
che in altri campi?*

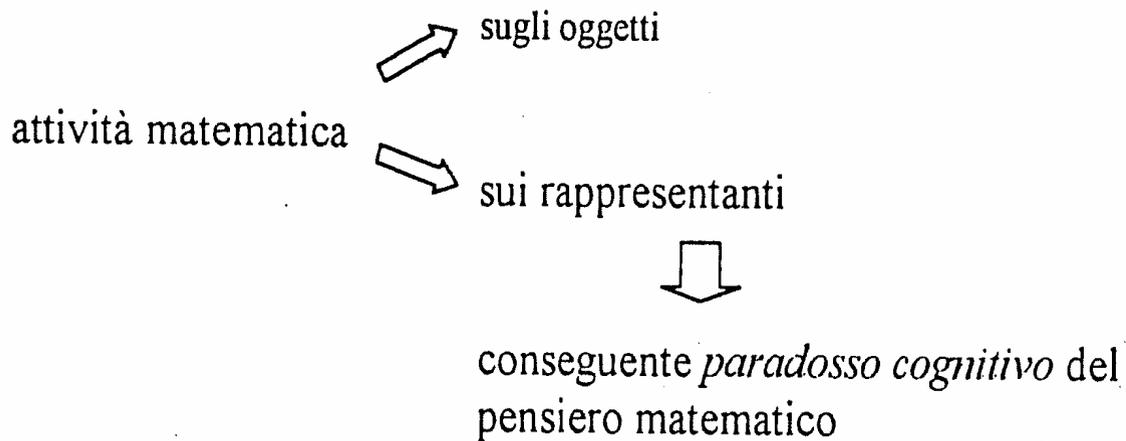
Nel dominio di questa domanda
si evidenzia il ruolo fondamentale
delle trasformazioni di rappresentazioni semiotiche
nelle attività matematiche.



Il caso della Matematica

“oggetto” matematico da concettualizzare: non esiste come
oggetto reale

OGGETTIVA INACCESSIBILITÀ ALLA PERCEZIONE
(conseguente necessità di) rappresentanti semiotici



Vediamo in che cosa consiste questo *paradosso*:

“... da una parte,
l'apprendimento degli oggetti matematici
non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte,
è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche
che è possibile un'attività su degli oggetti matematici.

Questo paradosso può costituire
un vero circolo vizioso per l'apprendimento.

Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli
oggetti matematici
con le loro rappresentazioni semiotiche
se essi non possono che avere relazione
con le sole rappresentazioni semiotiche?

L'impossibilità di un accesso diretto
agli oggetti matematici,
al di fuori di ogni rappresentazione semiotica,
rende la confusione quasi inevitabile.

1 0010 1010 1101 0001 0100 1011

E, al contrario,
come possono essi acquisire la padronanza
dei trattamenti matematici,
necessariamente legati
alle rappresentazioni semiotiche,
se non hanno già un apprendimento concettuale
degli oggetti rappresentati?

Questo paradosso è ancora più forte
se si identifica attività matematica ed
attività concettuale e
se si considera le rappresentazioni semiotiche
come secondarie o estrinseche”.

1 2 4 5

In questa fase “paradossale” dell’apprendimento,
bisogna stare molto attenti;
da un lato lo studente non sa
che sta apprendendo segni che stanno per concetti
e che dovrebbe invece apprendere concetti;

se l’insegnante non ha mai riflettuto su questo punto,
d’altra parte,
crederà che lo studente stia apprendendo concetti,
mentre questi sta in realtà “apprendendo”
solo a far uso di segni.

L'insegnante di sostegno
 ha proposto questa
 scheda per
 l'apprendimento dei
 numeri da 1 a 9.

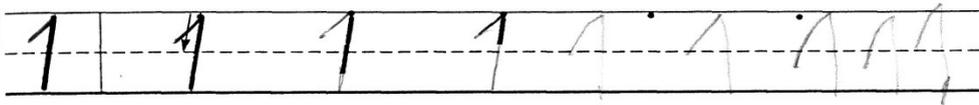
Esercizi: Prima di iniziare gli esercizi, invitate gli alunni a tracciare nell'aria i numeri 1 e 2. Mostrate poi come si scrive il numero 1, partendo dal puntino posto sulla linea superiore; gli alunni continueranno poi da soli. Ripetete la procedura con il numero 2. Spiegate poi

agli alunni che il successivo esercizio consiste nel contare quanti stivali ci sono nei riquadri e scrivere il numero corrispondente nelle linee a fianco del riquadro.

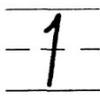
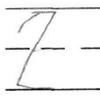
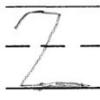
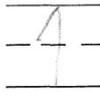
Applicazioni: Eseguite l'esercizio con tutta la classe.

Esercizi

2. Scrivi 1 e 2.



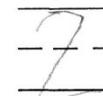
3. Scrivi il numero corrispondente.

Esempio	 	<p>2.</p>  
<p>3.</p>  	<p>4.</p>  	

Applicazioni

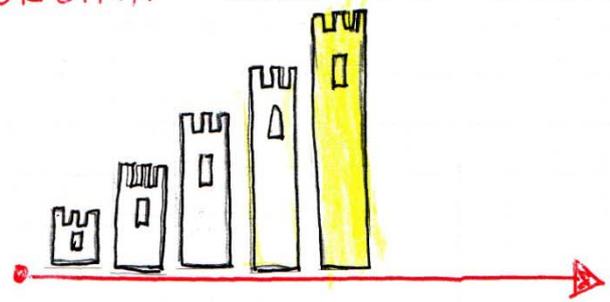
4. Questo è un  .

Scrivi quanti sono.



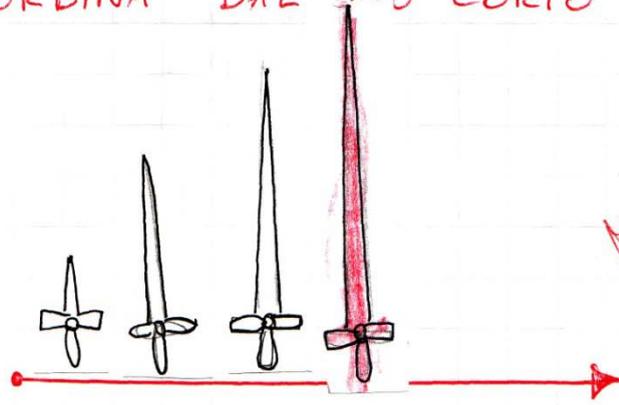
L'insegnante ha preparato una scheda sull'ordinamento dal più basso al più alto e dal più corto al più lungo.

ORDINA DAL PIÙ BASSO AL PIÙ ALTO



RAPE RONZOLO È RINCHIUSA NELLA TORRE PIÙ ALTA. QUAL È? COLORALA DI GIALLO

ORDINA DAL PIÙ CORTO AL PIÙ LUNGO



MOLTO BENE!

IL PRINCIPE PER UCCIDERE LA STREGA USA LA SPADA PIÙ LUNGA. QUAL È. COLORALA DI ROSSO

La fotografia di Kosuth



Per realizzare la fotografia, Kosuth ha giustapposto tre elementi nel montaggio che ha fotografato.



Una sedia contro il muro (l'oggetto stesso).

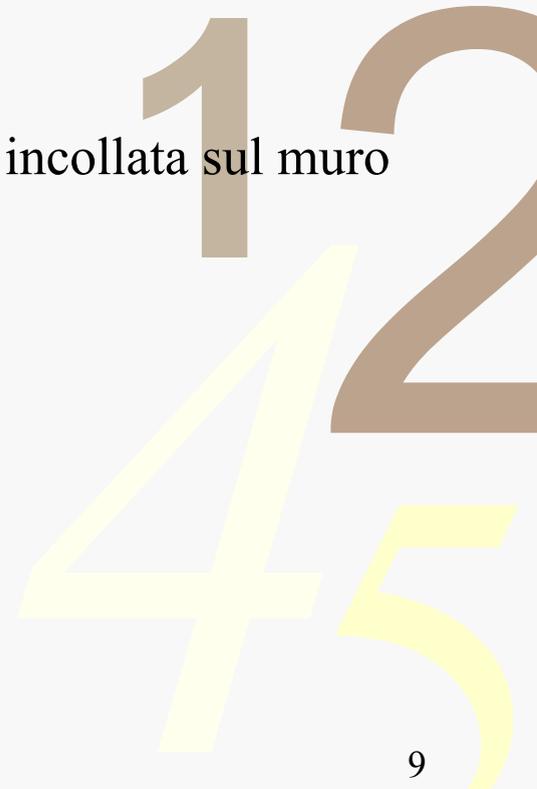
1 0010 1010 1101 0001 0100 1011



La fotografia della sedia contro il muro (un'immagine dell'oggetto)



Una pagina di dizionario aperta alla pagina “sedia” e incollata sul muro
(una descrizione verbale)



Il montaggio di Kosuth si basa su una doppia
giustapposizione.

C'è la giustapposizione di un **oggetto e di una delle sue**
rappresentazioni.

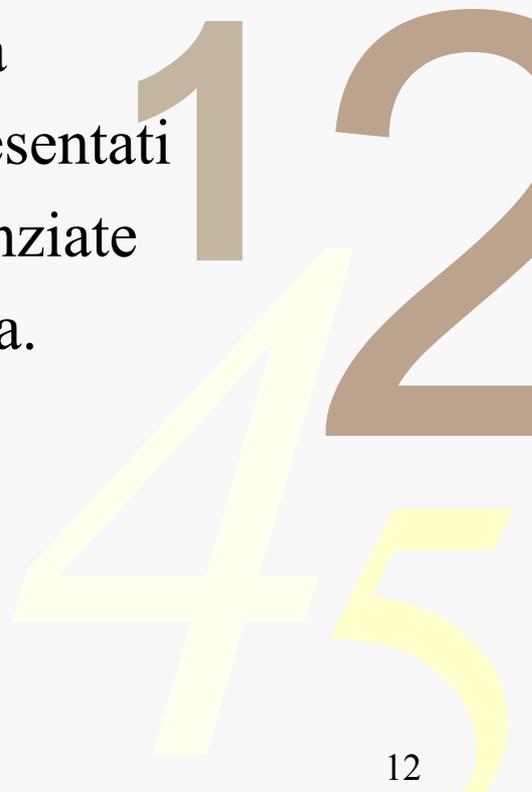
L'oggetto è una sedia sulla quale ci si può sedere,
ciò che la distingue dalla foto e dal testo descrittivo,
che sono solo rappresentazioni.

C'è la giustapposizione di **molte rappresentazioni**
di un medesimo oggetto.

Kosuth si è limitato a due rappresentazioni,
avrebbe potuto aggiungerne altre.

Basta sostituire la sedia con qualunque altro oggetto
per constatare che la presentazione in parallelo
di rappresentazioni diverse si ritrova
in qualsiasi pagina di manuale, di rivista, di scheda di lavoro,
di comunicazione aziendale.

L'attività cognitiva sollecitata
è il riconoscimento di oggetti rappresentati
mediante rappresentazioni differenziate
che devono spiegarsi a vicenda.



La doppia giustapposizione permette di porre
i due seguenti problemi cruciali:

1. Ci sono molte situazioni nelle quali si dà soltanto una rappresentazione senza alcun altro accesso all'oggetto studiato.

Come è possibile acquisire la conoscenza di oggetti o fenomeni ai quali non si può avere accesso attraverso un'esperienza più o meno diretta o personale?

2. Quando mettiamo fianco a fianco
parecchie rappresentazioni di uno stesso oggetto,
per confrontarle,
possiamo constatare che i loro contenuti non hanno
quasi niente in comune.

Come riconoscere che è lo stesso oggetto
che è rappresentato nelle rappresentazioni
i cui contenuti non presentano alcuna somiglianza,
se non si ha un altro accesso a questo oggetto e questo solamente
attraverso rappresentazioni?

È questo il problema che si rivela cruciale
nell'apprendimento della matematica.

110010 1010 1101 0001 0100 1011

Basta prendere l'esempio della rappresentazione dei numeri.

1 2
4 5



Esempio della rappresentazione dei numeri

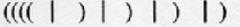
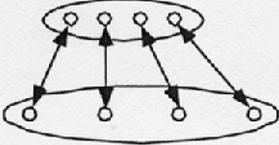
Rappresentazione ICONICA Rappresentazioni "proprie"	Rappresentazioni SIMBOLICHE (cifre o parole)
<p>0010 1010 110</p> <p> dita o fiammiferi? «legame collettivo»</p> <p> configurazione poligonale</p> <p> iterazione</p> <p> compito piagetiano</p>	<p>4 SISTEMA decimale</p> <p>100 SISTEMA binario</p> <p>Questi sistemi di posizione in base n implicano questo segno per eccellenza, "0", che non si sente nell'oralizzazione della scrittura simbolica, e aprono possibili estensioni.</p> <p>64/16 scrittura frazionaria.</p> <p>Quattro denominazione verbale il cui senso deriva dal suo posto in una successione di denominazioni.</p>

Figura 2. Giustapposizione di molte rappresentazioni di un numero



Qui possiamo avere solo
una giustapposizione di rappresentazioni
in quanto ci troviamo nella situazione nella quale
gli oggetti studiati sono **inaccessibili**
al di fuori di rappresentazioni
dipendenti unicamente da una attività semiotica.



La giustapposizione di otto rappresentazioni possibili di un numero

illustra bene la complessità di questo problema.

1 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Quando un alunno usa una o due di queste rappresentazioni
diventa con ciò stesso capace di riconoscere i numeri
in una terza o quarta rappresentazione?



Un esempio di esercizio di completamento.

Difficoltà nel risolvere questo esercizio:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = 2$$

Gli insegnanti l'avevano proposto allo scopo di fare passare gli allievi attraverso la rappresentazione decimale

$$1 + 0,50 + 0,25 + 0,20 + \dots = 2$$

Cosa che a loro non era passata lontanamente per la testa.

Semiotica e noetica nella Matematica e apprendimento della Matematica.

In Matematica,
l'acquisizione concettuale di un oggetto
passa necessariamente
attraverso l'acquisizione di una o
più **rappresentazioni semiotiche**.

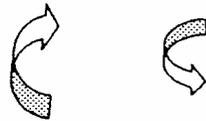
Prendendo a prestito da Duval:
non c'è noetica senza semiotica.

Si intende con “*caratteristiche della semiotica*”
tre attività cognitive diverse:

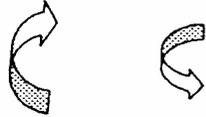
- **rappresentazione;**
- **trattamento;**
- **conversione.**

Un grafico per illustrare le caratteristiche della semiotica

oggetto A da rappresentare



sceita dei tratti distintivi di A

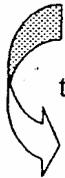


RAPPRESENTAZIONE $R^m_i(A)$ in un dato registro semiotico r^m



trasformazione di rappresentazione **TRATTAMENTO**

nuova rappresentazione ($i \neq j$) $R^m_j(A)$ nello *stesso* registro semiotico r^m



trasformazione di registro **CONVERSIONE**

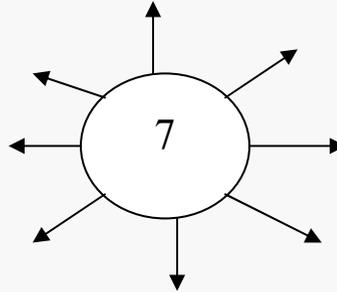
nuova rappresentazione ($h \neq i$, $h \neq j$) $R^h(A)$ in un *altro* registro semiotico r^h ($n \neq m$)

($m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \dots$)

L'esperienza con i numeri in colore

Un episodio in una classe prima

- Ins supplente (alla lavagna): “La maestra mi ha detto di fare questo disegno. Cosa significa?”



- Luc: “È il sole del 7”.
- Ins supplente: (va verso la finestra, guarda il cielo...)
- Luc: “No! Non il sole! È tipo il sole! Ha un cerchio con tante frecce e allora si chiama così”.

I raggi del sole

Ins supplente: “Perché prima ho scritto 7 e 0 e adesso 2 e 5?”

Val: “Perché è il 7”.

Ins supplente: “Ah! È il 7. Ma 7 cosa?”

Mar: “Il regolo nero”.

Ins supplente: “Il regolo nero è il 7?”

Classe: “Sì!”

Oggetto matematico: **numero**
rappresentazioni e registri??????



Le numerose rappresentazioni semiotiche

un oggetto matematico: il numero,
un registro semiotico: la lingua naturale,
con la rappresentazione semiotica: orale,
e la rappresentazione semiotica: scritta,

un altro registro semiotico: la lingua aritmetica,
con la rappresentazione semiotica: scrittura in cifre,

un altro registro semiotico: il colore,
con la rappresentazione semiotica: regoli di diverso colore,

un altro registro semiotico: la grandezza,
con la rappresentazione semiotica: regoli di diverse dimensioni,

un altro registro semiotico: il disegno,
con la rappresentazione semiotica: disegno dei regoli, delle coppie,
degli schemi (*a sole*) ecc.

6 rappresentazioni semiotiche

1. il suono “sette” e la scrittura “sette”
all’interno di uno stesso registro,
2. la scrittura 7,
3. un determinato colore,
4. una determinata grandezza,
5. il disegno del regolo,
6. varie rappresentazioni iconiche.

*“Una complessa e macchinosa messa in scena di registri
per uno scopo banale, per un obiettivo scontato,
per una competenza già formata”.*

(D’Amore)

Ins supplente: “Prendiamo le scatole dei regoli...

...Mar, dammi 7...”

Mar: “Ecco” (consegna il regolo nero).

Ins supplente: (lo guarda, lo gira, lo rigira) “... Ma perché me ne hai dato uno solo?”

Mar: “Perché quello è il nero, è il 7”.

Ins supplente: “Questo è 7?” (Lo guarda, lo gira, rigira...)

“Ma io non vedo niente di 7, mi hai dato solo un pezzo di plastica nero...

(Conta le facce del parallelepipedo) 1, 2, 3, 4, 5, 6... dov'è 7?

Tu mi imbrogli, io ti avevo chiesto 7 e tu mi hai dato un pezzo solo”.

Val: “Ma quello è il 7!”

Classe: “È il 7”.

Dalla discussione si osserva...

Con quest'uso dei regoli gli allievi vengono spinti
a fare una forte associazione tra un numero
(rappresentazione semiotica: orale e scritta)

e una rappresentazione (il regolo)

concentrandosi soprattutto sulla caratteristica del colore
(rappresentazione semiotica: regoli di diverso colore).

Il concetto viene quindi confuso con lo strumento utilizzato
per parlarne.

Nel caso dei numeri in colore accade che...

l'insegnante propone agli allievi

delle diverse rappresentazioni semiotiche del numero attraverso

le caratteristiche più evidenti del colore

(che chiaramente poco c'entra con la quantità)

e della misura

(che poco c'entra con la cardinalità).

Ma tutte queste informazioni percettive,

che nel contesto della Matematica sono avvertite come
“parassite”,

potrebbero essere invece quelle considerate dall'allievo
come caratterizzanti il concetto del quale si sta parlando,
essendo più percepibili ed immediate.

*“L’aggiunta di rappresentazioni nuove, addirittura innaturali
(che cosa c’entrano i numeri con i colori e la grandezza?),
su un argomento già costruito e formato
non può certo aiutare chi sa già,
ma solo confondergli le idee;
né può aiutare chi non sa
dato che, con molta probabilità, chi non sa,
non sa proprio per confusione di registri semiotici”.*

(D’Amore)

E la trasformazione semiotica di conversione?

Ins supplente: “Ma se ne vedo uno solo, perché dite che è 7?”

Gai: “Perché vedi? 0100 1011

(Prende un regolo arancione con scritto in sequenza i numeri da 1 a 10, lo avvicina al regolo nero)

vedi? È 7! Arriva fino qua! 7!”

Ins supplente: “Ah! È lungo fino al 7!

Allora devo avere sempre con me questo regolo arancione con tutti questi numeri,

per sapere quanto valgono i regoli...”.

Gai: “Sì!”

...

Ins supplente: “E se io prendo questi

(7 regoli neri, li conta a bassa voce, ma viene ascoltato...) 1,
2, 3, 4, 5, 6, 7... quanti ne ho?”

Val: “Ne hai 7”.

Ins supplente: “Anche prima con un solo regolo nero
avevo 7?”

Classe: “Sì!”

Ins supplente: (prende 1 regolo nero in una mano e i 7 regoli
neri nell'altra):

“Dove ho 7?”

Classe: “Là!” (Indicano la mano con i 7 regoli).

la trasformazione semiotica di *conversione*
(cambiamento di registro di rappresentazione)
è la trasformazione più importante per l'acquisizione
del concetto ma allo stesso tempo
la più difficile per gli allievi,
viene fortemente limitata da un materiale così strutturato
che si fonda principalmente su fattori percettivi.

“Le difficoltà nel passaggio da una rappresentazione
in un registro ad una rappresentazione in un altro registro
rivelano la complessità, troppo spesso sottostimata,
dell'articolazione tra i registri di rappresentazione
utilizzati in matematica”

Dalle frasi scritte...

Ins supplente: “A cosa servono i regoli?”

Dan: “Giochiamo”.

Ins supplente: “A cosa servono i regoli?”

Val: “A fare le piramidi e a imparare a contare e a fare i muretti e a fare le copie”.

Ins supplente: “Cosa sono i muretti?”

Val: “Sono dei regoli uno sopra l’altro”.

Ins supplente: “Cosa servono?”

Val: “Servono per imparare a memoria il muretto del 2 del 3 del 4 del 5 del 6 del 7 del 8 del 9 e del 10”.

Ins supplente: “A cosa servono i regoli?”

Gio: “Per migliorarsi a scrivere i numeri”.

Quali domande porsi nella scelta delle rappresentazioni?

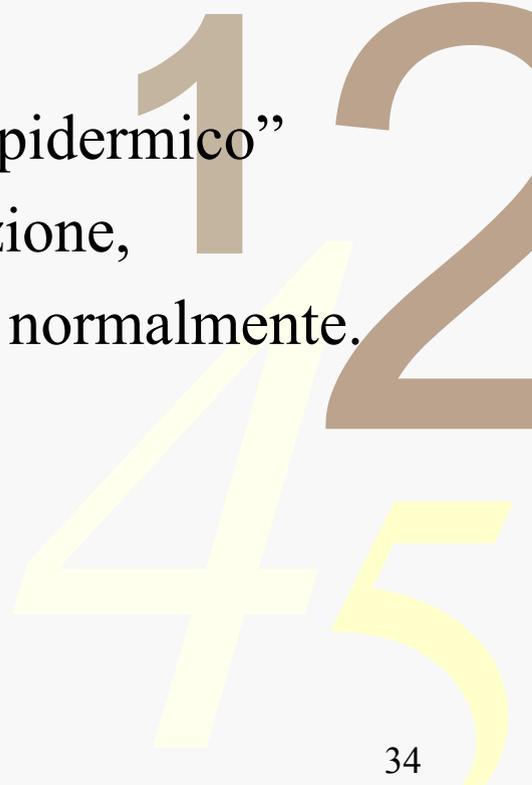
Quali rappresentazioni?

10010 *Quali dovrebbero funzionare meglio e perché?*

Con che cosa si articolano?

Come introdurle?

Troppo spesso ci si limita al successo “epidermico”
nell’uso di un tipo di rappresentazione,
come se i trasferimenti dovessero avvenire normalmente.



La direzione dell'obiettivo:

“capire non prima di tutto per diventare capace di validare,
ma per imparare a capire,

cioè per essere poi capace di porsi nuove domande,
di trovare i mezzi di esplorarle,

in seguito,

di controllare la pertinenza
delle esplorazioni e delle interpretazioni .

Insomma: l'autonomia per eccellenza”.

Grazie Duval! Proviamoci....